

WOJCIECH WITKOWSKI

SYNTEZA SFORMUŁOWANIA  
NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK  
PODLEGAJĄCYCH  
SKOŃCZONYM OBROTOM  
W UJĘCIU MES

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*monografie*

*111*

POLITECHNIKA GDAŃSKA

WOJCIECH WITKOWSKI

SYNTEZA SFORMUŁOWANIA  
NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK  
PODLEGAJĄCYCH  
SKOŃCZONYM OBROTOM  
W UJĘCIU MES



GDAŃSK 2011

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

*Janusz T. Cieśliński*

REDAKTOR SERII

*Jerzy M. Sawicki*

RECENZENCI

*Ireneusz Kreja*

*Wojciech Pietraszkiewicz*

PROJEKT OKŁADKI

*Jolanta Cieślawska*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna na stronie  
[www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG](http://www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG)

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2011

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978–83–7348–358–3

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

---

Wydanie I. Ark. wyd. 9,9, ark. druku 11,5, 111/645

---

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 54 232 37 23

# SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW .....	5
1. WSTĘP .....	7
1.1. Uwagi ogólne .....	7
1.2. Materiały kompozytowe.....	9
1.3. Teorie powłok .....	13
1.4. Metoda Elementów Skończonych w analizie powłok .....	15
1.4.1. Wstęp .....	15
1.4.2. Wybrane wiadomości o modelowaniu powłok przy pomocy MES .....	16
1.4.3. Modelowanie powłok warstwowych .....	18
1.4.4. Blokada numeryczna rozwiązań MES.....	21
1.4.5. Całkowanie zredukowane.....	22
1.4.6. Podejścia niezgodnych postaci i EAS.....	23
1.4.7. Podejście ANS .....	25
1.4.8. Podejście EAS+ANS.....	26
1.4.9. Ocena elementów skończonych .....	27
1.5. Cel, zakres i założenia przyjęte w pracy.....	29
1.6. Układ pracy .....	30
2. OŚRODEK COSSERATÓW .....	33
2.1. Przegląd zagadnień .....	33
2.1.1. Wybrane zagadnienia mechaniki ośrodka Cosseratów .....	35
2.1.2. Teoria płyt i powłok, wybrane implementacje MES.....	41
2.2. Liniowy ośrodek Cosseratów .....	44
3. TEORIA POWŁOK .....	47
3.1. Opis powierzchni odniesienia powłoki.....	47
3.1.1. Baza ortonormalna .....	52
3.2. Wypadkowe równania równowagi dla powłok regularnych .....	54
3.2.1. Zasady zachowania .....	54
3.2.2. Sprowadzone zasady zachowania mechaniki powłok.....	56
3.2.3. Lokalne równania równowagi.....	58
3.3. Słaba postać problemu brzegowego .....	60
3.3.1. Zasada prac wirtualnych.....	62
3.3.2. Kinematyka powłoki, miary odkształceń.....	63
3.3.3. Zasady wariacyjne .....	64
4. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE .....	67
4.1. Uwagi ogólne .....	67
4.2. Formułowanie równań konstytutywnych w mechanice kontinuum.....	69
4.2.1. Materiał hipersprężysty .....	70
4.2.2. Liniowa teoria sprężystości .....	73
4.3. Równania konstytutywne liniowego ośrodka Cosseratów .....	74
4.3.1. Liniowo sprężyste kontinuum Cosseratów .....	74
4.3.2. Nieliniowa 6-parametrowa teoria powłok sprężystych .....	77
4.3.3. Model Altenbacha i Eremeyeva liniowo sprężystej płyty Cosseratów.....	79
4.4. Podejście równoważnej jednej warstwy .....	83
4.4.1. Wprowadzenie.....	83
4.4.2. Sformułowanie na poziomie warstwy.....	85
4.4.3. Sformułowanie w wielkościach przekrojowych .....	87

5. ELEMENTY SKOŃCZONE .....	89
5.1. Przegląd podstaw MES .....	89
5.1.1. Aproksymacja i interpolacja, zagadnienia ogólne .....	89
5.1.2. Istnienie rozwiązania .....	92
5.1.3. Typowy 4-węzłowy powłokowy element skończony .....	92
5.1.4. Zamiana współrzędnych .....	93
5.2. Linearyzacja .....	94
5.3. Interpolacja .....	97
5.3.1. Uwagi ogólne .....	97
5.3.2. Interpolacja wielkości wektorowych .....	97
5.3.3. Interpolacja na grupie obrotów $SO(3)$ .....	97
5.3.4. Interpolacja wektora obrotów .....	98
5.3.5. Interpolacja niezależnych pól odkształceń .....	99
5.3.6. Interpolacja odkształceń w podejściu ANS .....	103
5.3.7. Uwagi o elementach hybrydowo-mieszanych .....	104
5.3.8. Macierze elementowe .....	106
6. PRZYKŁADY NUMERYCZNE .....	109
6.1. Wprowadzenie .....	109
6.2. Przykłady analizy liniowej .....	109
6.2.1. Test łaty .....	109
6.2.2. Test inf-sup .....	112
6.2.3. Test wartości własnych .....	113
6.2.4. Swobodnie podparta zginana belka warstwowa o przekroju dwuteowym .....	114
6.3. Przykłady analizy nieliniowej .....	115
6.3.1. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą skupioną .....	115
6.3.2. Czasza oparta na rzucie kwadratu .....	117
6.3.3. Swobodna paraboloidalno-hiperboliczna powłoka trójwarstwowa .....	120
6.3.4. Półsfera z otworem obciążona siłami samorównoważącymi się .....	124
6.3.5. Chłodnia kominowa (hiperboloida) warstwowa .....	126
6.3.6. Wspornik o przekroju ceowym .....	132
6.3.7. Stateczność giętna swobodnie podpartego słupa o przekroju dwuteowym .....	134
6.3.8. Stateczność giętno-skrętna słupa o przekroju krzyżowym .....	139
7. UWAGI KOŃCOWE .....	142
7.1. Podsumowanie .....	142
7.2. Wnioski .....	143
7.3. Kierunki dalszych badań .....	144
BIBLIOGRAFIA .....	145
Streszczenie w języku polskim .....	163
Streszczenie w języku angielskim .....	164
Dodatek A .....	165
Dodatek B .....	167
Dodatek C .....	169
Dodatek D .....	173
Dodatek E .....	178

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

## Oznaczenia

$\otimes$	– iloczyn tensorowy wektorów
$\times$	– iloczyn wektorowy wektorów
$\wedge$	– iloczyn skośny wektorów
$\cdot$	– iloczyn skalarny wektorów, tensorów
$:$	– podwójne nasunięcie tensora trzeciej walencji na tensor drugiej walencji
$E^3$	– przestrzeń euklidesowa
$SO(3)$	– grupa właściwych tensorów ortogonalnych
$so(3)$	– grupa tensorów skośnie symetrycznych
$M$	– powierzchnia podstawowa powłoki
$T_x M$	– przestrzeń styczna do powłoki
$\mathbf{u}$	– wektor przemieszczeń trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\Phi$	– wektor obrotów trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\mathbf{p}$	– wektor naprężeń siłowych trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\mu$	– wektor naprężeń momentowych trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\gamma$	– tensor odkształceń trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\kappa$	– tensor skręcenia trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\mathbf{x}$	– wektor wodzący powierzchni podstawowej $M$ w konfiguracji odniesienia
$\mathbf{y}$	– wektor wodzący powierzchni podstawowej $M$ w konfiguracji zdeformowanej
$\underline{Q}$	– tensor obrotu
$T_0$	– tensor struktury powłoki w konfiguracji odniesienia
$T$	– tensor struktury powłoki w konfiguracji zdeformowanej
$B_0$	– tensor krzywizn
$\mathbf{T}$	– pierwszy tensor naprężeń Piolii-Kirchhoffa
$f(\mathbf{x})$	– przekrojowy wektor sił powierzchniowych
$c(\mathbf{x})$	– przekrojowy wektor momentów powierzchniowych
$\mathbf{N}_v$	– wektor wewnętrznych sił przekrojowych
$\mathbf{M}_v$	– wektor wewnętrznych momentów przekrojowych
$\mathbf{N}$	– tensor przekrojowych sił
$\mathbf{M}$	– tensor przekrojowych momentów
$\mathbf{u}$	– wektor rzeczywistych przesunięć
$\mathbf{v}(\mathbf{x})$	– kinematycznie dopuszczalne pole wirtualnych przesunięć
$\mathbf{w}(\mathbf{x})$	– kinematycznie dopuszczalne pole wirtualnych obrotów
$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$	– wektor odkształceń membranowych i poprzecznych
$\boldsymbol{\kappa}_\beta$	– wektor krzywizn
$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \underline{Q})$	– wektor rzeczywistych uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$	– wektor wirtualnych pól uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{B}(\mathbf{u})$	– macierzowy operator przemieszczenie-odkształcenie
$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$	– wektor uogólnionych odkształceń (zgodnych)
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	– wektor odkształceń wzbogacających
$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$	– dwuwymiarowa funkcja gęstości energii odkształcenia
$\mathbf{I}_j$	– funkcjonal konstytutywny
$\mathbf{C}$	– tensor konstytutywny
$\lambda, \mu$	– stałe Lamego

$E, \nu$	– moduł Younga i współczynnik Poissona
$\alpha_t$	– współczynnik owinięcia
$\alpha_s$	– współczynnik ścinania
$a_{(k)}, b_{(k)}$	– osie materiałowe warstwy
$H^k$	– przestrzeń Sobolewa rzędu $k$
$L_2$	– przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem
$L_p^M(\xi)$	– wielomian Lagrange'a rzędu $M$
$\Pi_{(e)}$	– obszar element skończonego w przestrzeni $E^3$
$\pi_{(e)}$	– obszar element skończonego w przestrzeni $R^2$
$\mathbf{P}(\xi)$	– macierz interpolacyjna wzbogacających odkształceń we współrzędnych fizycznych
$\mathbf{H}(\xi)$	– macierz interpolacyjna wzbogacających odkształceń we współrzędnych rodzimych
$\mathbf{M}(\xi)$	– macierz transformacji wzbogacających odkształceń
$\mathbf{L}(\xi)$	– macierz funkcji kształtu elementu skończonego
$\mathbf{K}_T^{(e)}$	– styczna macierz sztywności elementu skończonego
$\mathbf{r}^{(e)}$	– elementowy wektor sił wewnętrznych
$\Delta\boldsymbol{\beta}_{(e)}$	– elementowy wektor przyrostów parametrów wzbogacających
$\mathbf{p}^{(e)}$	– elementowy wektor obciążeń

### Skróty

ANS	– koncepcja dwustopniowej interpolacji odkształceń (ang. <i>Assumed Natural Strain</i> )
CFRC	– kompozyty wzmocnione włóknem węglowym (ang. <i>Carbon Fiber Reinforced Composites</i> )
EAS	– koncepcja wzbogaconych odkształceń (ang. <i>Enhanced Assumed Strain</i> )
ESL	– model równoważnej jednej warstwy (ang. <i>Equivalent Single Layer</i> )
FI	– całkowanie pełne (ang. <i>Full Integration</i> )
FOSD	– teoria płyt oparta na kinematyce Reissnera–Mindlina (ang. <i>First Order Shear Deformation Theory</i> )
FRC	– kompozyty wzmocnione włóknem (ang. <i>Fiber Reinforced Composites</i> )
GFRP	– kompozyty wzmocnione włóknem szklanym (ang. <i>Glass Fiber Reinforced Plastics</i> )
HOT	– teoria wyższego rzędu (ang. <i>Higher Order Theory</i> )
MOC	– mechanika ośrodków ciągłych
LW	– dyskretny model warstwowy (ang. <i>Layer-Wise</i> )

### Przelicznik jednostek USCS na jednostki SI

1 in	– 0.0254 m
1 m	– 39.37 in
1 lb	– 4.448 N
1 N	– 0.2248 lb
1 psi	– 0.00689 MPa
1 MPa	– 145.0377 psi

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego własnego pt. *Nieliniowa teoria i analiza deformacji i stateczności warstwowych powłok kompozytowych metodą elementów skończonych* w ramach umowy nr 2542/B/T02/2009/37 do wniosku nr N N506 254237 z Ministerstwem Nauki i Szkolnictwa Wyższego.